

Matematik Bölümü Analiz I Dersi 4. Kısa Sınavı
07.12.2023
S o r u l a r v e Cevapları

1. Gerekçeleri ile açıklayarak $A = [2, 5]$ kümesinin kompakt olup-olmadığını belirleyiniz.

► $A = [2, 5]$ kümesinin $\mathbb{R}$ deki tümleyeni olan $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 2) \cup (5, \infty)$ kümesi $(-\infty, 2)$ ve $(5, \infty)$ açık aralıklarının birleşimidir. Her bir açık aralık bir açık küme ve açık aralıkların herhangi sayıda birleşimi yine bir açık küme olduğundan A kümesinin tümleyeni bir açık kümedir ve dolayısıyla A bir kapalı kümedir. Ayrıca A kümesi 2 ile alttan ve 5 ile üstten sınırlı olduğundan bir sınırlı kümedir. Heine-Borel Teoreminden dolayı A bir kompakt kümedir.

2. Herhangi bir $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = g(|x|)$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

► Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = g(|-x|) = g(|x|) = f(x)$ olduğu için $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir çift fonksiyondur.

3. $A = (-\infty, 0]$ ve $B = [0, \infty)$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$, $f(x) = \frac{x^2}{3}$ fonksiyonunun kesin monoton olduğunu gösteriniz.

► $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ için $x_1 < x_2 \leq 0$ iken $x_1 - x_2 < 0$ ve $x_1 + x_2 < 0$ olur. Buradan

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2}{3} - \frac{x_2^2}{3} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{3} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{3} > 0$$

yani $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu A üzerinde kesin azalan, dolayısıyla kesin monotondur.

4. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösteriniz.

► $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu A da sınırlı olduğundan, bir $M_1 > 0$ sayısı her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M_1$ olacak şekilde vardır. $\alpha \in \mathbb{R}$ için $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ile verilen $\alpha f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu alalım. Buradan her $x \in A$ için $|\alpha f(x)| = |\alpha| |f(x)| \leq |\alpha| M_1$ elde edilir. $M = |\alpha| M_1 > 0$ diyelim. Bu durumda her $x \in A$ için $|\alpha f(x)| \leq M$, yani αf fonksiyonu A üzerinde sınırlı olur.