

Matematik Bölümü Analiz I Dersi 5. Kısa Sınavı
21.12.2023
S o r u l a r v e C e v a p l a r ı

1. $(a_n) = (2^{-n})$ dizisinin monoton olduğunu gösteriniz.
► Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} - a_n = 2^{-(n+1)} - 2^{-n} = 2^{-n}(2^{-1} - 1) < 0$ veya her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ve dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan, $(a_n) = (2^{-n})$ dizisi kesin azalandır, yani (kesin) monotonudur.
2. Yakınsaklık tanımını kullanarak $(a_n) = \left(\frac{8n+6}{2n}\right)$ dizisinin limitinin 4 olduğunu gösteriniz.
► Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - 4| < \varepsilon$ olacak şekilde var olmalı. $|a_n - 4| = \left|\frac{8n+6}{2n} - 4\right| = \left|\frac{6}{2n}\right| = \frac{3}{n}$ olduğundan, $n_\varepsilon > \frac{3}{\varepsilon}$ seçilirse, her $n \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - 4| = \frac{3}{n} < \frac{3}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ olacağından, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n+6}{2n} = 4$ olur.
3. $(a_n) = ((-1)^n n)$ dizisinin sınırlı olup-olmadığını belirleyiniz.
► n doğal sayısı büyürken verilen dizinin terimleri de mtlak değerce büyüdüğünden, dizinin sınırsız olduğu sezgisel olarak görülebilir. Bunu doğrulamak için, her $K > 0$ sayısı için bir $n_K \in \mathbb{N}$ sayısı $|a_{n_K}| > K$ olacak şekilde var olmalı. Eğer $n_K > K$ seçilirse, $|a_{n_K}| = |(-1)^{n_K} n_K| > K$ elde edilir. Bu durumda verilen dizi sınırlı değildir.
4. Alt dizilerini kullanarak $(a_n) = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ dizisinin iraksak olduğunu gösteriniz.
► Verilen dizinin $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere (a_{2k-1}) ve (a_{2k}) alt dizilerini alalım.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{2k-1} \right) = -1$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left((-1)^{2k} + \frac{1}{2k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2k} \right) = 1,$$

yani

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$$

olduğundan, verilen dizi iraksaktır.

5. $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ dizisinin limitini bulunuz.

► Ders kitabı Teorem 5.1.55 ve Tanım 5.2.25 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^2 = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^2 = e^2$$

elde edilir.