

Matematik Bölümü Analiz I Dersi Bütünleme Sınavı
29.01.2024

S o r u l a r v e C e v a p l a r ı

1. $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$ fonksiyonunun alttan sınırlı olmadığını gösteriniz.

► f fonksiyonunun $(-1, \infty)$ da alttan sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir N reel sayısı her $x \in (-1, \infty)$ için $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3} \geq N$ olacak şekilde vardır. Eğer $x_N < \sqrt[3]{\frac{N}{1-N}}$ koşulu sağlanacak şekilde herhangi bir $x_N \in (-1, \infty)$ sayısı alınırsa, $x_N^3 < \frac{N}{1-N} \implies \frac{x_N^3}{1-x_N^3} < N \implies f(x_N^3) < N$ elde edilir. Bu f fonksiyonunun $(-1, \infty)$ da N ile alttan sınırlı olmasıyla çelişir. O zaman f fonksiyonu $(-1, \infty)$ da alttan sınırlı değildir.

2. Dizilerin yakınsaklık(limit) tanımını kullanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{6n^2 + n} = \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

► $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{6n^2 + n} = \frac{1}{2}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir n_ε doğal sayısının $n \geq n_\varepsilon$ koşulunu sağlayan her n doğal sayısı için $\left| \frac{3n^2 + 5}{6n^2 + n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ olacak şekilde var olmasıdır.

Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $\left| \frac{3n^2 + 5}{6n^2 + n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{6n^2 + 10 - 6n^2 - n}{12n^2 + 2n} \right| = \left| \frac{10 - n}{12n^2 + 2n} \right|$ bulunur. Eğer $n \geq 10$ ise $|10 - n| = 10 - n$ olacağından, bir $n \geq 10$ doğal sayısı için $\left| \frac{3n^2 + 5}{6n^2 + n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{n-10}{12n^2 + 2n} \leq \frac{n}{12n^2 + 2n} \leq \frac{n}{12n^2} = \frac{1}{12n}$ olur. Buradan $n_\varepsilon > \max\{\frac{1}{12\varepsilon}, 10\}$ seçilirse, her $n \geq n_\varepsilon$ doğal sayısı için $\left| \frac{3n^2 + 5}{6n^2 + n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{12n} \leq \frac{1}{12n_\varepsilon} < \varepsilon$ elde edilir.

3. $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 1)$ şeklinde tekrarlamalı olarak tanımlanan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.

► Verilen dizinin terimleri $(a_n) = (1, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{14}{27}, \dots)$ şeklindedir.

Öncelikle dizinin sınırlı olduğunu gösterelim. Dizinin terimlerinden dizinin 1 ile üstten sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Ardından dizinin 0 ile alttan sınırlı olduğunu, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için tümevarım kullanalım. $a_1 = 1 > 0$ olduğundan $n = 1$ için önerme doğrudur. $a_k \geq 0$, yani $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_{k+1} = \frac{1}{3}(a_k + 1) > \frac{1}{3}(0 + 1) = \frac{1}{3} > 0$ olduğundan, önerme $n = k + 1$ için de doğrudur. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ elde edilir. Yani dizi alttan sınırlıdır, dolayısıyla sınırlıdır.

Şimdi de dizinin azalan olduğunu tümevarım kullanarak gösterelim. $a_1 = 1$ ve $a_2 = \frac{1}{3}(a_1 + 1) = \frac{1}{3}(1 + 1) = \frac{2}{3} \implies a_1 > a_2$ olduğundan $n = 1$ için dizi (kesin) azalandır. $n = k$ için dizinin azalan olduğunu, yani $a_k > a_{k+1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_{k+1} = \frac{1}{3}(a_k + 1) > \frac{1}{3}(a_{k+1} + 1) = a_{k+2}$ olduğundan, $n = k + 1$ için önerme doğru, dolayısıyla dizi (kesin) azalandır.

Bu durumda, Monoton Yakınsaklık Teoreminden (Teorem 5.2.9) dolayı verilen dizi yakınsaktır ve limiti vardır: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olsun. Dizi yakınsak olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ olduğunu biliyoruz (Sonuç 5.2.65). Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$ olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 5)$ eşitliğinin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ iken limiti alınrsa, $a = \frac{1}{3}(a + 1) \implies a = \frac{1}{2}$ elde edilir. Sonuç olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ bulunur.

4. Dizilerin limit özelliklerini kullanarak aşağıda verilen limitleri bulunuz.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n - 3}{\cos(n^3) - 3n^2} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n + 3n^2}{2n^3 + 3n!}$$

$$\blacktriangleright (a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n - 3}{\cos(n^3) - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(4 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{\cos(n^3)}{n^2} - 3\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}}{\frac{\cos(n^3)}{n^2} - 3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^3)}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} 3}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^2 = 0$ ve ayrıca her n doğal sayısı için $|\cos(n^3)| \leq 1 \implies -1 \leq \cos(n^3) \leq 1 \implies \frac{-1}{n^3} \leq \frac{\cos(n^3)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n^3} \leq$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^3)}{n^3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \implies 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^3)}{n^3} \leq 0$ olduğundan, sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^3)}{n^3} = 0 \text{ elde edilir. Bu durumda } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n - 3}{\cos(n^3) - 3n^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^3)}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} 3} = \frac{4 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{0 - 3} = -\frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n + 3n^2}{2n^3 + 3n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{8^n}{n!} + \frac{3n^2}{n!}}{\frac{2n^3}{n!} + 3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n}{n!} + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3} \text{ yazılabilir. Burada } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} = 0 \text{ olduğu dikkate alınrsa, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n + 3n^2}{2n^3 + 3n!} = \frac{0 + 3 \cdot 0}{2 \cdot 0 + 3} = 0 \text{ elde edilir.}$$

5. $(a_n) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cos \frac{n\pi}{2}$ dizisinin iraksak olduğunu gösteriniz ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ değerlerini bulunuz.

$\blacktriangleright$ Bir dizinin yakınsak alt dizileri farklı limitlere sahipse bu dizi iraksaktır. Verilen (a_n) dizisinin (a_{4k-3}) , (a_{4k-2}) , (a_{4k-1}) ve (a_{4k}) alt dizilerinin limitlerine bakalım: Her k doğal sayısı için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k-3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4k-3}\right) \cos \frac{(4k-3)\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4k-3}\right) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \frac{(4k-3)\pi}{2} = 0 \text{ ve benzer şekilde } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k-2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4k-2}\right) \cos \frac{(4k-2)\pi}{2} = -1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4k-1}\right) \cos \frac{(4k-1)\pi}{2} = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4k}\right) \cos \frac{4k\pi}{2} = 1$$

elde edilir. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k-3} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k-2} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k}$ olduğu için verilen dizi iraksaktır. Bu durumda dizinin yığılma noktalarının, yani alt dizilerinin limitlerinin kümesi $Y = \{-1, 0, 1\}$ olduğundan, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ elde edilir. (Birden fazla yığılma noktasına sahip olduğu için dizi iraksaktır).

6. (a_n) ve (b_n) verilmiş iki Cauchy dizisi ise $(a_n + b_n)$ dizisinin de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

$\blacktriangleright$ (a_n) ve (b_n) verilmiş iki Cauchy dizisi ise, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir n'_ε doğal sayısı her $m, n \geq n'_\varepsilon$ doğal sayıları için $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve bir n''_ε doğal sayısı her $m, n \geq n''_\varepsilon$ doğal sayıları için $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde vardır. $(a_n + b_n)$ dizisinin de bir Cauchy dizisi

olması için bir n_ε doğal sayısı her $m, n \geq n_\varepsilon$ doğal sayıları için $|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon$ olacak şekilde var olmalı. $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ alalım. Bu durumda her $m, n \geq n_\varepsilon$ için

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |a_n - a_m + b_n - b_m| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. O zaman $(a_n + b_n)$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

7. Fonksiyonların limit tanımını kullanarak $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 5x^3) = 3$ olduğunu gösteriniz.

► Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < |x - 0| = |x| < \delta_\varepsilon$ koşulunu sağlayan her x reel sayısı için $|(3 - 5x^3) - 3| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı bulmak istiyoruz.

$$|(3 - 5x^3) - 3| = |-5x^3| = 5|x|^3 < \varepsilon$$

olduğundan, $\delta_\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{5}}$ seçilirse, $0 < |x| < \delta_\varepsilon$ koşulunu sağlayan her x için

$$|(3 - 5x^3) - 3| = 5|x|^3 < 5\delta_\varepsilon^3 = 5\left(\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{5}}\right)^3 = \varepsilon$$

olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 5x^3) = 3$ elde edilir.