

Matematik Bölümü Analiz I Dersi 2. Kısa Sınavı
02.11.2023

S o r u l a r v e C e v a p l a r ı

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu ve $A = [-1, 2]$, $B = [1, 4]$ kümeleri veriliyor. $f(A)$ görüntü kümesini ve $f^{-1}(B)$ ters görüntü kümesini bulunuz.

► $f(A) = f([-1, 2]) = [0, 4]$ ve $f^{-1}(B) = f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$

2. $f : (1, 2) \rightarrow (3, \infty)$, $f(x) = \frac{3}{x-1}$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösteriniz.

► Her $x_1, x_2 \in (1, 2)$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olduğunda $x_1 = x_2$ oluyorsa verilen fonksiyonun birebirdir. O zaman öcelikle Her $x_1, x_2 \in (1, 2)$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $\frac{3}{x_1-1} = \frac{3}{x_2-1} \Rightarrow x_1 = x_2$ elde edilir. Verilen fonksiyon birebirdir.

Şimdi de örten olduğunu gösterelim. Her $y \in (3, \infty)$ için $y = f(x)$ olacak şekilde en az bir $x \in (1, 2)$ var olmalı. Her $y \in (3, \infty)$ için $y = \frac{3}{x-1} \Rightarrow x = \frac{3+y}{y} \in (1, 2)$ olduğundan f fonksiyonu örtendir.

3. $a, b, x, y, r \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$ olsun. Eğer $|x - a| \leq r$ ve $|b - y| \leq r$ ise

$$|(a + b) - (x + y)| \leq 2r$$

olduğunu gösteriniz.

►

$$\begin{aligned} |(a + b) - (x + y)| &= |a + b - x - y| \\ &= |(b - y) - (x - a)| \\ &\leq |b - y| + |x - a| \quad (\text{Sonuç 3.2.28 den}) \\ &\leq r + r \quad (\text{verilen } |x - a| \leq r \text{ ve } |b - y| \leq r \text{ eşitsizliğinden}) \\ &= 2r \end{aligned}$$

4. $X = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin eğer varsa supremumunu, infimumunu, minimumunu ve maksimumunu bulunuz.

► $X = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ olduğundan, $\frac{1}{2}$ sayısı X kümesinin bir alt sınırıdır ve dolayısıyla X kümesi alttan sınırlıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} < 0$ ve bu yüzden $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ olduğundan dolayı $n = 1$ için bu kümenin en küçük elemanı olan $\frac{1}{2}$ sayısı bu kümenin infimumudur: $\inf X = \frac{1}{2}$. $\inf X \in X$ olduğundan $\inf X = \min X = \frac{1}{2}$ olur. (**Alternatif ispat:** her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ olduğundan $\frac{1}{2}$ sayısı X için bir alt sınırdır, X in bir infimumu vardır ve $\inf X \geq \frac{1}{2}$ olur. $\frac{1}{2} \in X$ olduğundan $\frac{1}{2} \geq \inf X$ dir. Son iki eşitsizlikten $\inf X = \frac{1}{2}$ elde edilir.)

Her $n \in \mathbb{N}$ için $n < n + 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$ olduğundan 1 sayısı X kümesinin bir üst sınırıdır ve X kümesi üstten sınırlıdır. $\sup X = 1$ olduğunu gösterelim. Çelişki yöntemiyle göstermek istiyoruz. Bunun için $\sup X < 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\varepsilon = 1 - \sup X > 0$ alırsak, Arşimet ilkesinin sonucu gereği $\frac{1}{n} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ olduğundan

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1+n-n}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \Rightarrow \sup X < \frac{n}{n+1}$$

elde edilir. Halbuki, her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{n}{n+1} \in X$ olduğundan $\frac{n}{n+1} < \sup X$ olmalıydı. Bu çelişki $\sup X < 1$ olduğunu kabul etmemizden kaynaklandı. O zaman $\sup X = 1$ olur. $\sup X \notin X$ olduğu için X kümesinin en büyük elemanı (maksimumu) yoktur.