

Matematik Bölümü Analiz I Dersi Arasınava
20.11.2023
S o r u l a r v e C e v a p l a r ı

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonu ve $A = [-2, 1)$, $B = (-1, 6)$ kümeleri veriliyor. $f(A)$ görüntü kümesini ve $f^{-1}(B)$ ters görüntü kümesini bulunuz.

► $A = [-2, 1) = [-2, 0] \cup (0, 1)$ olduğunu biliyoruz. Her bir aralık için ayrı ayrı bakılırsa, $-2 \leq x \leq 0$ için $4 \geq x^2 \geq 0 \implies 1 \geq x^2 - 3 \geq -3$ ve $0 < x < 1$ için $0 < x^2 < 1 \implies -3 < x^2 - 3 < -2$ olduğundan $f(A) = f([-2, 1)) = f([-2, 0] \cup (0, 1)) = f([-2, 0]) \cup f((0, 1)) = [-3, 1] \cup (-3, -2) = [-3, 1]$ elde edilir.

Şimdi $B = (-1, 6)$ kümesi için $f^{-1}(B)$ ters görüntü kümesini bulalım.

$-1 < x^2 - 3 < 6 \implies 2 < x^2 < 9 \implies -3 < x < -\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2} < x < 3$ olduğundan $f^{-1}(B) = f^{-1}((-1, 6)) = (-3, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3)$ elde edilir.

2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n > 1$ için $n! < n^n$ olduğunu gösteriniz.

► Tümevarım yöntemini kullanarak ispat yapalım. $p(n)$ önermesini istenen eşitsizlik olarak alalım.

$2! < 2^2$ olduğundan $n = 2$ için $p(n)$ doğrudur.

Bir $n = k$ için $p(n)$ önermesinin doğru olduğunu, yani $k! < k^k$ olduğunu kabul edelim.

Şimdi $n = k + 1$ için $p(n)$ önermesinin doğru olduğunu, yani $(k + 1)! < (k + 1)^{(k+1)}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} (k + 1)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k \cdot (k + 1) = k! \cdot (k + 1) \\ &\leq k^k (k + 1) \quad (k! < k^k \text{ kabulünden}) \\ &\leq (k + 1)^k (k + 1) \\ &= (k + 1)^{k+1} \end{aligned}$$

olduğundan $n = k + 1$ için $p(n)$ önermesi doğrudur. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n > 1$ için $n! < n^n$ eşitsizliği doğrudur.

3. $\varepsilon > 0$ olmak üzere bir $a \in \mathbb{R}$ noktasına uzaklığı ε dan küçük olan noktaların kümesini matematiksel olarak ifade ediniz.

► $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$

4. $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $a < b + \varepsilon \iff a \leq b$ olduğunu gösteriniz.

► Öncelikle her $\varepsilon > 0$ için $a < b + \varepsilon$ ise $a \leq b$ olduğunu gösterelim. $a > b$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a - b > 0$ olur. $\varepsilon = a - b$ seçelim. Her $\varepsilon > 0$ için $a < b + \varepsilon$ olduğundan, bu eşitsizlik özel olarak $\varepsilon = a - b$ için de doğru olur. ε nu son eşitsizlikte yazarsak $a < a$ çelişmesini elde ederiz. Bu durumda $a \leq b$ olmalıdır.

Tersine $a \leq b$ olduğunda her $\varepsilon > 0$ için $a < b + \varepsilon$ olduğunu gösterelim. Her $\varepsilon > 0$ için $b < b + \varepsilon$ dur. $a \leq b$ ve $b < b + \varepsilon$ eşitsizliklerinden $a < b + \varepsilon$ elde edilir. (Ders Kitabı, Önerme 3.6.3)

5. Eğer varsa $X = \left\{ \frac{4+x}{x} : x \geq 1 \right\}$ kümesinin infimumunu ve supremumunu bulunuz.

► Her $x \geq 1$ için X kümesi üstten 5 ile sınırlıdır. Ayrıca $x = 1$ için $\frac{4+x}{x} = 5$ olduğundan $5 \in X$ dir. Buradan $\sup X = 5$ elde edilir.

Her $x \geq 1$ için $4 + x > x \implies \frac{4+x}{x} > 1$ olduğundan, X kümesi alttan 1 ile sınırlıdır. Böylece X kümesinin infimumu vardır. $\inf X = 1$ olduğunu gösterelim. $\inf X = b$ olduğunu ve $b > 1$ olduğunu kabul edelim. $5 \in X$ olduğu için $1 < b < 5$ olur. Diğer taraftan, $1 < a < b < 5$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı bulabiliriz. Eğer $x = 4a - 4$ alırsak $\frac{4+x}{x} = a$ elde ederiz. Böylece $a \in X$ ve b bir alt sınır olduğu için $b \leq a$ olur. Bu ise $a < b$ olmasıyla çelişir. O zaman $\inf X = 1$ dir.

6. $A \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan sınırlı bir küme ve c bir reel sayı olsun. $c + A = \{c + a : a \in A\}$ olmak üzere $\sup(c + A) = c + \sup A$ olduğunu gösteriniz.

► $A \neq \emptyset$ olduğu için bir $a \in A$ vardır. Bu durumda $c + a \in c + A$ dir ve bu da $c + A \neq \emptyset$ anlamına gelir. A sınırlı bir küme olduğundan üstten sınırlıdır ve Tamlık Aksiyomu gereği bir supremumu vardır. Bu durumda $c + a \leq c + \sup A$ yazılabilir. Bu da $c + A$ kümesinin $c + \sup A$ ile üstten sınırlı olduğunu gösterir. Bu nedenle, Tamlık Aksiyomu gereği $\sup(c + A)$ vardır ve

$$\sup(c + A) \leq c + \sup A \quad (1)$$

olur. Her $a \in A$ için

$$c + a \leq \sup(c + A) \implies a \leq \sup(c + A) - c$$

olduğundan $\sup(c + A) - c$ sayısı A kümesi için bir üst sınırdır. Buradan

$$\sup A \leq \sup(c + A) - c \implies c + \sup A \leq \sup(c + A) \quad (2)$$

yazılabilir. Sonuç olarak (1) ve (2) den $\sup(c + A) = c + \sup A$ elde edilir.

7. Verilen bir $c > 0$ reel sayısı için $\frac{1}{n^2} < c$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. İspatlayınız

► Arşimet ilkesinde $b = c > 0$ ve $a = \frac{1}{n}$ alınırsa, $nc > \frac{1}{n}$ olup, buradan $\frac{1}{n^2} < c$ elde edilir.

8. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 5| \leq \frac{1}{2}\}$ kümesinin bir kapalı küme olduğunu gösteriniz.

► $A = \left[\frac{9}{2}, \frac{11}{2} \right]$ dir. A nın $\mathbb{R}$ ye göre tümleyeni olan $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, \frac{9}{2}) \cup (\frac{11}{2}, \infty)$ kümesi, iki açık aralığın birleşimi, açık aralıklar açık küme ve herhangi sayıda açık kümenin birleşimi yine bir açık küme olduğundan, bir açık kümedir. Tümleyeni açık olan bir küme kapalı olduğundan, A bir kapalı kümedir.

9. $A \subseteq \overline{A}$ olduğunu gösteriniz. ($\overline{A}$: A nın kapanışı)

► Bunun için her $a \in A$ için $a \in \overline{A}$, yani A nın her bir elemanının A nın bir kapanış noktası olduğunu göstermeliyiz. Her $\varepsilon > 0$ için $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olduğunda a noktası A kümesinin bir kapanış noktası olarak adlandırıldığından, bu tanım gereği A kümesinin her bir elemanı A nın kapanış noktasıdır. Yani herhangi bir $a \in A$ için $a \in \overline{A}$ dir. Bu durumda $A \subseteq \overline{A}$ olur.

10. $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\}$ kümesinin yığılma noktalarını, izole noktalarını ve kapanışını bulunuz.

► $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x < 0$ ise $\varepsilon = -\frac{x}{2} > 0$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ komşuluğu A nın hiçbir elemanını içermeyiz $((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset)$. Eğer $x > 1$ ise $\varepsilon = \frac{x-1}{2} > 0$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ komşuluğu da A nın hiçbir elemanını içermeyiz $((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset)$. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{2^n} \in (0, 1]$ ve $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan, her $x \in (0, 1]$ için bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $\frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ olur. $\varepsilon < \min \left\{ x - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} - x \right\}$ seçilirse $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$ olur. $x = 0$ ise, Arşimet ilkesi gereği, her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ($a = \frac{n}{2^n}$, $b = \varepsilon > 0$). Bu durumda $\frac{1}{2^n} \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) \setminus \{0\} \cap A \neq \emptyset$. Bu durumda 0 sayısı A kümesinin bir yığılma noktasıdır: $A' = \{0\}$.

A kümesinin 0 dışındaki tüm elemanları A nın bir izole noktasıdır.

$\overline{A} = A \cup A'$ olduğundan $\overline{A} = A \cup \{0\} = A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\}$ elde edilir.