

Matematik Bölümü Analiz I Dersi 3. Kısa Sınavı
16.11.2023

S o r u l a r v e C e v a p l a r ı

1. Tümevarım kullanarak $n \in \mathbb{N}$ için $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ olduğunu gösteriniz.

► $p(n)$ önermesini istenen eşitlik olarak alalım. $2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ olduğundan $n = 1$ için $p(n)$ doğrudur. Bir $n = k$ için $p(n)$ önermesinin doğru olduğunu, yani

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

olduğunu kabul edelim. Şimdi $n = k + 1$ için $p(n)$ önermesinin doğru olduğunu göstermeliyiz. Son eşitliğin her iki tarafına $2k + 1$ eklersek

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

elde ederiz. Bu da $n = k + 1$ için $p(n)$ önermesinin doğru olduğu anlamına gelir. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ eşitliği doğrudur.

2. $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

► $\sqrt{3}$ sayısının rasyonel olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\sqrt{3}$ sayısını, m ve $n \neq 0$ aralarında asal sayılar tam sayılar olmak üzere $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ biçiminde yazabiliriz. Eşitliğin her iki tarafının karesini alırsak $3 = \frac{m^2}{n^2} \implies 3n^2 = m^2$ olduğundan m^2 3 ile bölünebilir ve $m = 3k$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır. Bunu önceki eşitlikte yazarsak $3n^2 = 9k^2 \implies n^2 = 3k^2$ elde ederiz. O zaman n^2 de 3 ile bölünebilir. Karesi 3 ile bölünebilen her tam sayı 3 ile bölünebildiğinden m ve n tam sayılarının her ikisi de 3 ile tam bölünür. Halbuki bu iki sayının aralarında asal olduğunu kabul etmiştik. Bir çelişki elde ettik. Bu çelişki $\sqrt{3}$ sayısının rasyonel olduğu kabulünden kaynaklandı. O zaman $\sqrt{3}$ sayısı bir irrasyonel sayıdır.

3. $[0, 1)$ ve $(0, 1]$ kümelerinin eş güçte (denk) olduklarını gösteriniz.

► $[0, 1)$ ve $(0, 1]$ kümeleri arasında $f(x) = 1 - x$ ile verilen $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1]$ fonksiyonunu alalım. $x_1, x_2 \in [0, 1)$ ve $f(x_1) = 1 - x_1 = 1 - x_2 = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğundan bu fonksiyon birebirdir. Her $y \in (0, 1]$ için $y = f(x) = 1 - x \implies x = 1 - y$ olacak şekilde bir $x \in [0, 1)$ var olduğundan bu fonksiyon aynı zamanda örten olur. $[0, 1)$ ve $(0, 1]$ kümeleri arasında birebir ve örten bir fonksiyon var olduğu için bu iki küme eş güçte kümelerdir: $[0, 1) \sim (0, 1]$

4. $[0, \sqrt{2}] \cap [3, 5]$ kümesinin bir kapalı küme olduğunu gösteriniz. (!?)

► $[0, \sqrt{2}] \cap [3, 5] = \emptyset$ ve boş küme($\emptyset$) hem açık hem de kapalı küme olduğundan, bu küme hem açık hem de bir kapalı kümedir.

5. $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ kümeleri verilsin. $A \subseteq B$ ise $A' \subseteq B'$ olduğunu gösteriniz. ($A' : A$ nın yığılma noktalarının kümesi)

► Herhangi bir $x \in A'$ alalım. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$ olur. $C = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} \cap A$ diyelim. $C \neq \emptyset$ dir ve $C \subseteq A$ olur. $A \subseteq B$ olduğundan $C \subseteq B$ olur. Bu durumda $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} \cap B \neq \emptyset$ olacağından, a noktası B nin bir yığılma noktasıdır. O halde $x \in B'$ olur. $x \in A'$ yığılma noktasını keyfi seçtiğimizden $A' \subseteq B'$ olur.