

Matematik Bölümü Analiz I Dersi Final Sınavı
15.01.2024

S o r u l a r v e C e v a p l a r ı

1. Gerekli açıklamaları yaparak $A = [1, 3)$ kümesinin kompakt olup-olmadığını belirleyiniz.

► $A = [1, 3)$ kümesinde $(a_n) = (3 - \frac{1}{n})$ dizisini alalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ ve $3 \notin A$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Teorem 5.1.70 den dolayı A kapalı bir küme değildir, dolayısıyla Heine-Borel Teoreminden dolayı A kümesi kompakt değildir.

2. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f nin üstten sınırlı olmadığını gösteriniz.

► f nin üstten sınırlı olması için bir M reel sayısı her $x \in (0, \infty)$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde var olmalıdır. f nin $(0, \infty)$ da üstten sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir M reel sayısı $(0, \infty)$ daki her x için $\frac{1}{x} \leq M$ olacak şekilde vardır. Diğer taraftan $x_M \in (0, \infty)$ sayısı $x_M < \frac{1}{M}$ olacak şekilde alırsa, $f(x_M) = \frac{1}{x_M} > M$ olur. Bu da f nin üstten sınırlı olması kabulüyle çelişir. Bu durumda f fonksiyonu $(0, \infty)$ da üstten sınırlı değildir.

(b) Her $a > 0$ reel sayısı için f nin $[a, \infty)$ aralığında sınırlı olduğunu gösteriniz.

► $a > 0$ reel sayısı için $[a, \infty)$ aralığı üzerinde f nin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul bir $M > 0$ sayısının her $x \in [a, \infty)$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde var olmasıdır. $M = \frac{1}{a}$ alırsa, her $x \in [a, \infty)$ için $x \geq a$ ve dolayısıyla $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ olduğundan, $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{a} = M$ elde edilir. Bu durumda f fonksiyonu $a > 0$ için $[a, \infty)$ da sınırlıdır.

3. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonlar olsun. $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösteriniz.

► $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonlar olduğundan, $M_1, M_2 > 0$ sayıları her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M_1$ ve $|g(x)| \leq M_2$ olacak şekilde vardır. Üçgen eşitsizliği kullanılarak, her $x \in A$ için

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$$

elde edilir. Bu durumda bir $M = M_1 + M_2 > 0$ sayısı her $x \in A$ için $|(f + g)(x)| \leq M$ olacak şekilde var olduğu için $f + g$ fonksiyonu sınırlıdır.

4. Dizilerin yakınsaklık tanımını kullanarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n} = 2$ olduğunu gösteriniz.

► $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$\left| \frac{2n^2+1}{n^2+3n} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2+1-2n^2-6n}{n^2+3n} \right| = \left| \frac{1-6n}{n^2+3n} \right| = \frac{6n-1}{n^2+3n} < \frac{6n}{n^2+3n} < \frac{6n}{n^2} = \frac{6}{n}$$

olduğundan, $n_\varepsilon > \frac{6}{\varepsilon}$ seçilirse, bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_\varepsilon$ için

$$\left| \frac{2n^2+1}{n^2+3n} - 2 \right| < \frac{6}{n} \leq \frac{6}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

olacak şekilde var olduğundan $\left(\frac{2n^2+1}{n^2+3n} \right)$ dizisinin limiti 2 dir.

5. Alt dizilerini kullanarak $(a_n) = \left((1 - \frac{1}{n}) \sin \frac{n\pi}{2}\right)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

► Bir dizinin yakınsak alt dizileri farklı limitlere sahipse bu dizi ıraksaktır. Verilen (a_n) dizisinin (a_{2k}) , (a_{4k+1}) ve (a_{4k-1}) alt dizilerinin limitlerine bakalım:

$$k = 1, 2, 3, \dots \text{ için } a_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \sin \frac{2\pi k}{2} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \sin \pi k = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ için } a_{4k+1} = \left(1 - \frac{1}{4k+1}\right) \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} = \left(1 - \frac{1}{4k+1}\right) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k+1} = 1,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \text{ için } a_{4k-1} = \left(1 - \frac{1}{4k-1}\right) \sin \frac{(4k-1)\pi}{2} = -\left(1 - \frac{1}{4k-1}\right) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_{4k-1} = -1.$$

Her bir alt dizi yakınsak, fakat farklı limitlere sahip olduğundan, verilen dizi ıraksaktır.

6. $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 5)$ şeklinde tekrarlamalı olarak tanımlanan (a_n) dizisinin monoton ve sınırlı olduğunu göstererek limitini bulunuz.

► Verilen dizinin terimleri $(a_n) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{13}{8}, \frac{53}{32}, \frac{213}{128}, \dots\right)$ şeklindedir. Öncelikle dizinin sınırlı olduğunu gösterelim. Dizinin terimlerinden dizinin 1 ile alttan sınırlı olduğu kolayca görülebilir. Ardından dizinin 2 ile üstten sınırlı olduğunu, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq 2$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için tümevarım kullanalım. $a_1 = 1 \leq 2$ olduğundan $n = 1$ için önerme doğrudur. $a_k \leq 2$, yani $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_{k+1} = \frac{1}{4}(a_k + 5) \leq \frac{1}{4}(2 + 5) = \frac{7}{4} < 2$ olduğundan, önerme $n = k + 1$ için de doğrudur. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq 2$ elde edilir. Yani dizi üstten sınırlıdır, dolayısıyla sınırlıdır.

Şimdi de dizinin artan olduğunu tümevarım kullanarak gösterelim. $a_1 = 1$ ve $a_2 = \frac{1}{4}(a_1 + 5) = \frac{1}{4}(1 + 5) = \frac{3}{2} \implies a_1 < a_2$ olduğundan $n = 1$ için dizi artandır. $n = k$ için dizinin artan olduğunu, yani $a_k < a_{k+1}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_{k+1} = \frac{1}{4}(a_k + 5) < \frac{1}{4}(a_{k+1} + 5) = a_{k+2}$ olduğundan, $n = k + 1$ için önerme doğru, dolayısıyla dizi artandır.

Bu durumda, Monoton Yakınsaklık Teoreminden (Teorem 5.2.9) dolayı verilen dizi yakınsaktır ve limiti vardır: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olsun. Dizi yakınsak olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ olduğunu biliyoruz (Sonuç 5.2.65). Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$ olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 5)$ eşitliğinin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ iken limiti alırsa, $a = \frac{1}{4}(a + 5) \implies a = \frac{5}{3}$ elde edilir. Sonuç olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5}{3}$ bulunur.

7. Limit özelliklerini kullanarak aşağıda verilen dizilerin limitini bulunuz.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 2n + 1}{3n - 2n^2}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{3}}$

► (a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 2n + 1}{3n - 2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{3}{n} - 2\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n} - 2} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 2} = \frac{5 - 0 + 0}{0 - 2} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n} + 1}{\sqrt{n} + \sqrt{3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 3} + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}}} = \frac{\sqrt{3} + 0}{1 + 0} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

8. $(a_n) = (n^2(-1 + (-1)^n))$ dizisi için $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ değerlerini bulunuz.

► $(a_n) = (-2, 0, -18, 0, -50, 0, -98, 0, \dots)$ dizisi alttan sınırlı olmayan bir dizidir. Bu yüzden $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur.

9. Tanım kullanarak $(a_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

► $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $m > n$ için

$$\left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \right| = \frac{1}{2^n} \left| 1 - \frac{1}{2^{m-n}} \right| < \frac{1}{2^n}$$

olur. O zaman $n_\varepsilon > \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ seçilirse, her $\varepsilon > 0$ için bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı her $m, n \geq n_\varepsilon$ için $m > n$ iken

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$$

olacak şekilde var olduğundan (a_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

10. Fonksiyonların limit tanımını kullanarak $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 7) = -1$ olduğunu gösteriniz.

► Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < |x - 2| < \delta_\varepsilon$ koşulunu sağlayan her x reel sayısı için $|(3x - 7) - (-1)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı bulmak istiyoruz.

$$|(3x - 7) - (-1)| = |3x - 6| = 3|x - 2|$$

olduğundan, $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$ seçilirse,

$$0 < |x - 2| < \delta_\varepsilon \text{ iken } |(3x - 7) - (-1)| = 3|x - 2| < 3\delta_\varepsilon = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

olduğundan, $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 7) = -1$ elde edilir.