

Matematik Bölümü Analiz I Dersi 6. Kısa Sınavı
05.01.2024

S o r u l a r v e C e v a p l a r ı

1. $(a_n) = \left(\sin \frac{n\pi}{3}\right)$ dizisi için $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ değerlerini bulunuz (30 p)

►

$$\begin{aligned}(a_n) &= \left(\sin \frac{n\pi}{3}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}, \sin \pi, \sin \frac{4\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3}, \sin 2\pi, \sin \frac{7\pi}{3}, \sin \frac{8\pi}{3}, \sin 3\pi, \dots\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dots\right)\end{aligned}$$

olduğundan $(a_n) = \left(\sin \frac{n\pi}{3}\right)$ dizisi sınırlı bir dizidir. Bu dizinin yakınsak alt dizilerinin limitleri $-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan, yığılma noktalarının kümesi $Y = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ olur. Böylece $\sup Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\inf Y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

2. $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz (30 p)

► Eğer $m > n$ alınırsa,

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{2n+1}{n} - \frac{2m+1}{m}\right| = \left|\frac{m-n}{mn}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n}$$

bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon \text{ için } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu durumda,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_\varepsilon \text{ için } |a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

olur. Bu ise $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması anlamına gelir.

3. Cauchy ölçütünü (kriterini) kullanarak $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2}\right)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz (40 p)

► $p \in \mathbb{N}$ için $a_{n+p} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3(n+1)-2} + \frac{1}{3(n+2)-2} + \dots + \frac{1}{3(n+p)-2}$ olur. Bu durumda

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{1}{3(n+1)-2} + \frac{1}{3(n+2)-2} + \dots + \frac{1}{3(n+p)-2}\right|$$

$p = n$ alırsak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &= |a_{2n} - a_n| = \left|\frac{1}{3(n+1)-2} + \frac{1}{3(n+2)-2} + \dots + \frac{1}{3(2n)-2}\right| \\ &> n \cdot \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $\varepsilon = \frac{1}{6}$ seçilirse, $p = n$ olması halinde $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ eşitsizliği gerçekleşmez. O zaman, (a_n) dizisi bir Cauchy dizisi değildir ve Cauchy ölçütüne göre ıraksaktır.